FAKULTA STAVEBNÍ ústav matematiky a deskriptivní geometrie

BAA001 Matematika 1

3. DERIVACE FUNKCE

3.7 Funkce rostoucí a klesající, extrémy funkce
3.8 Funkce konvexní a konkávní, inflexní body
3.9 Asymptoty grafu funkce
3.10 Průběh funkce

Mgr. BLANKA MORÁVKOVÁ, Ph.D.

Základní literatura

FAST

Dlouhý, Oldřich – Tryhuk, Václav: *Matematika I, Diferenciální počet funkce jedné reálné proměnné*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o. Brno, 2018. ISBN: 978-80-7204-982-0

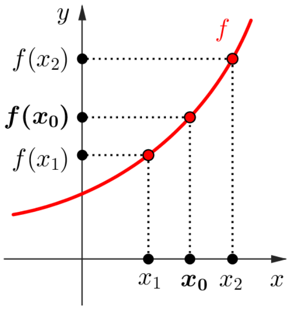
Definice

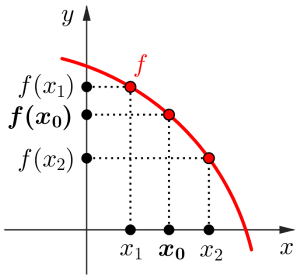
Funkce f je **rostoucí v bodě** x_0, existuje-li okolí $\mathcal{U}(x_0) \subset D(f)$ takové, že

1) $\forall x_1 \in \mathcal{U}(x_0), x_1 < x_0 : \quad f(x_1) < f(x_0)$,
2) $\forall x_2 \in \mathcal{U}(x_0), x_2 > x_0 : \quad f(x_2) > f(x_0)$.

Funkce f je **klesající v bodě** x_0, existuje-li okolí $\mathcal{U}(x_0) \subset D(f)$ takové, že

1) $\forall x_1 \in \mathcal{U}(x_0), x_1 < x_0 : \quad f(x_1) > f(x_0)$,
2) $\forall x_2 \in \mathcal{U}(x_0), x_2 > x_0 : \quad f(x_2) < f(x_0)$.





Věta

Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci

- $f'(x_0) > 0$, pak je funkce f v bodě x_0 **rostoucí**,
- $f'(x_0) < 0$, pak je funkce f v bodě x_0 **klesající**.

Věta

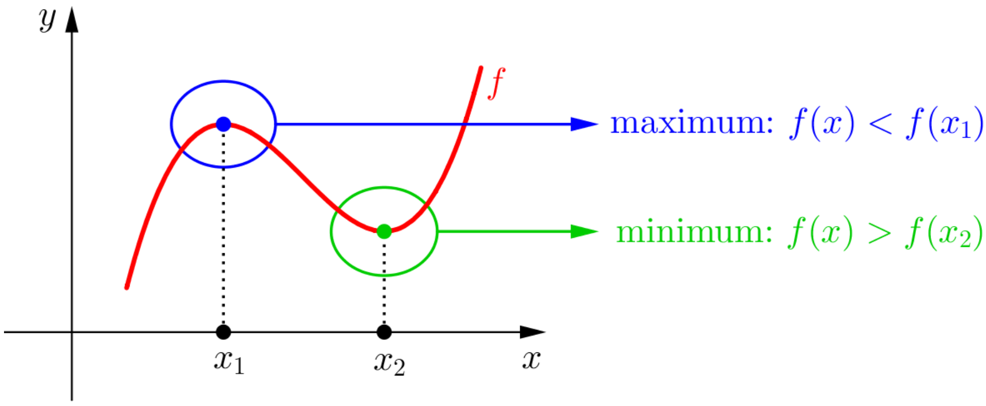
Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a má-li v intervalu (a, b) derivaci

- $f'(x) > 0$, pak je funkce f **rostoucí na intervalu $\langle a, b\rangle$**,
- $f'(x) < 0$, pak je funkce f **klesající na intervalu $\langle a, b\rangle$**.

Definice

Funkce f má v bodě $x_0 \in D(f)$
ostré **lokální minimum**, resp. ostré **lokální maximum**,
jestliže existuje okolí $\mathcal{P}(x_0, \delta) \subset D(f)$ tak, že pro všechna $x \in \mathcal{P}(x_0, \delta)$ platí $f(x) > f(x_0)$, resp. $f(x) < f(x_0)$.

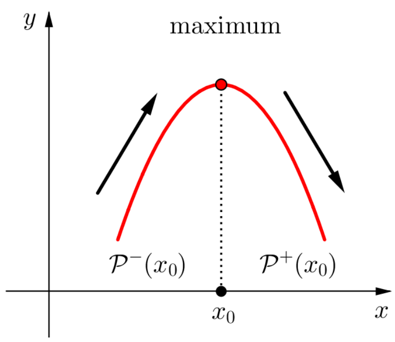
Ostré lokální maximum a minimum nazýváme ostré **lokální extrémy**.

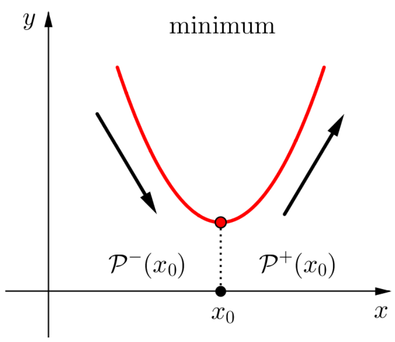


Věta

Je-li funkce f spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a existuje-li prstencové okolí $\mathcal{P}(x_0, \delta)$ takové, že f je

- v $\mathcal{P}^-(x_0, \delta)$ rostoucí a v $\mathcal{P}^+(x_0, \delta)$ klesající, pak má f v bodě x_0 ostré lokální maximum,
- v $\mathcal{P}^-(x_0, \delta)$ klesající a v $\mathcal{P}^+(x_0, \delta)$ rostoucí, pak má f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

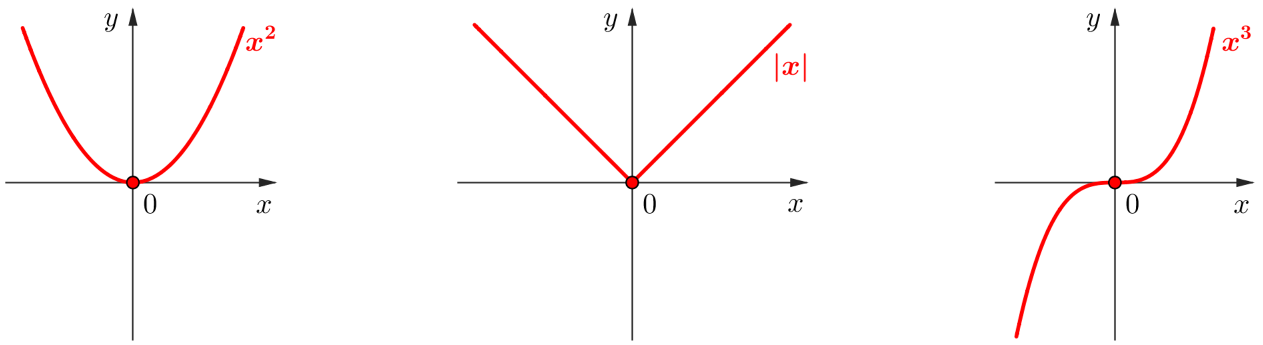




Funkce f může mít lokální extrémy

a) v bodech, v nichž $f'(x_0) = 0$ ... **stacionární body**,

b) v bodech, v nichž f nemá derivaci.



$f'(x_0) = 0$ $\quad$ $f'(x_0)\ \nexists$ $\quad$ $f'(x_0) = 0$

3.7 Funkce rostoucí a klesající, extrémy funkce

FAST

Věta

Je-li $f'(x_0) = 0$ a má-li funkce f v bodě x_0 druhou derivaci $f''(x_0) \neq 0$, pak má funkce f v bodě x_0 ostrý lokální extrém a to

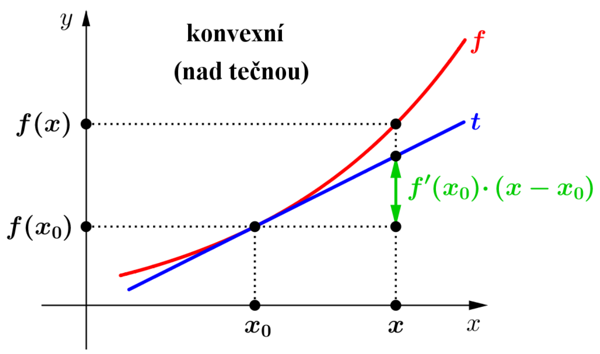
- ostré lokální maximum, je-li $f''(x_0) < 0$,
- ostré lokální minimum, je-li $f''(x_0) > 0$.

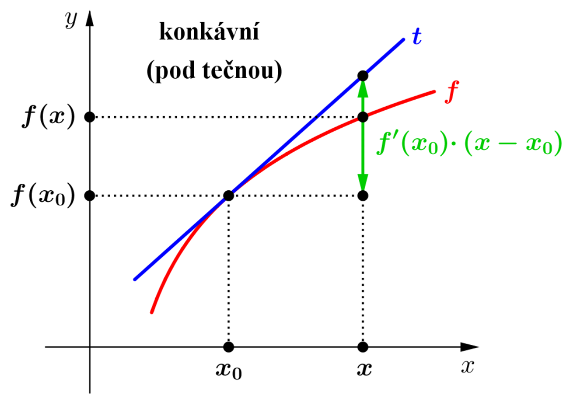
Příklad 3.12

Určete intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

Definice

Má-li funkce f derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, pak řekneme, že f je v bodě x_0 ryze **konvexní**, resp. ryze **konkávní**, jestliže existuje okolí $\mathcal{P}(x_0, \delta)$ takové, že pro všechna $x \in \mathcal{P}(x_0, \delta)$ platí
$\boldsymbol{f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$, resp. $\boldsymbol{f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$,
tj. graf funkce f leží v $\mathcal{P}(x_0, \delta)$ nad tečnou, resp. pod tečnou, sestrojenou v bodě $[x_0, f(x_0)]$.





Věta

Má-li funkce f v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ druhou derivaci $f''(x_0)$, pak je-li

- $f''(x_0) > 0$, je f v bodě x_0 ryze konvexní,
- $f''(x_0) < 0$, je f v bodě x_0 ryze konkávní.

Věta

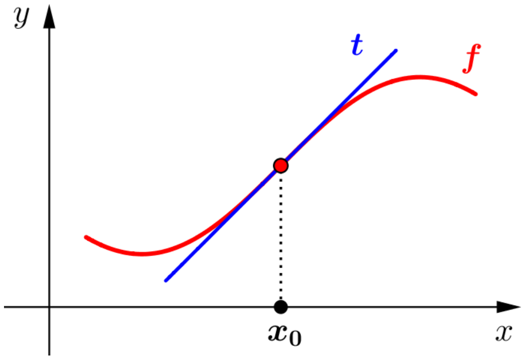
Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a má-li v intervalu (a, b) druhou derivaci

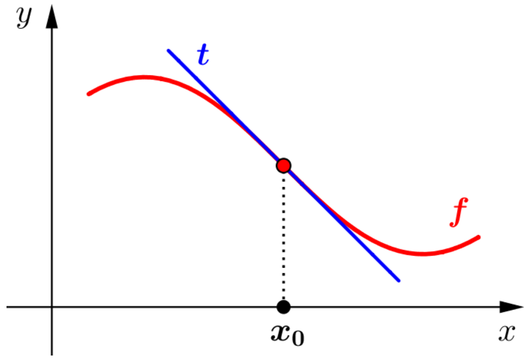
- $f''(x) > 0$, pak je funkce f **konvexní na intervalu** $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$,
- $f''(x) < 0$, pak je funkce f **konkávní na intervalu** $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$.

3.8 Funkce konvexní a konkávní, inflexní body

Definice

Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 **inflexní bod**, jestliže v x_0 existuje tečna ke grafu funkce f a f'' mění v x_0 znaménko, tj. funkce se v x_0 mění z konvexní na konkávní, nebo obráceně.



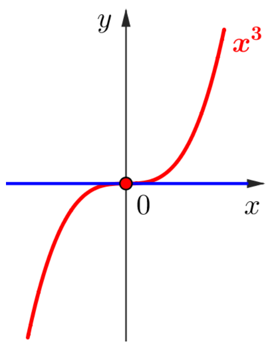


3.8 Funkce konvexní a konkávní, inflexní body

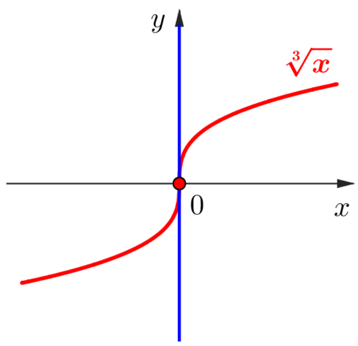
Pro inflexní bod x_0 funkce f platí:

a) $f''(x_0) = 0$, nebo

b) $f''(x_0)$ neexistuje.



$f''(x_0) = 0$



$f''(x_0) \nexists$

Příklad 3.13

Určete intervaly konvexnosti a konkávnosti a inflexní body funkce $f(x) = x\ln(x-1)$.

Definice (Asymptota bez směrnice)

Přímka

$$\boldsymbol{x = x_0}$$

se nazývá **asymptota bez směrnice** funkce f v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže má funkce f v bodě x_0 alespoň jednu jednostrannou limitu nevlastní, tj.

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty \qquad \text{nebo} \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

Asymptoty bez směrnice

- nazýváme také **svislé asymptoty**
- mohou být v bodech nespojitosti funkce, tj. v bodech $x_0 \notin D(f)$, nebo na okraji definičního oboru
- jsou rovnoběžné s osou y

Definice (Asymptota se směrnicí)

Přímka

$$\boldsymbol{y = ax + b}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

se nazývá **asymptota se směrnicí** funkce f pro $x \to \infty$, resp. pro $x \to -\infty$, právě tehdy, když

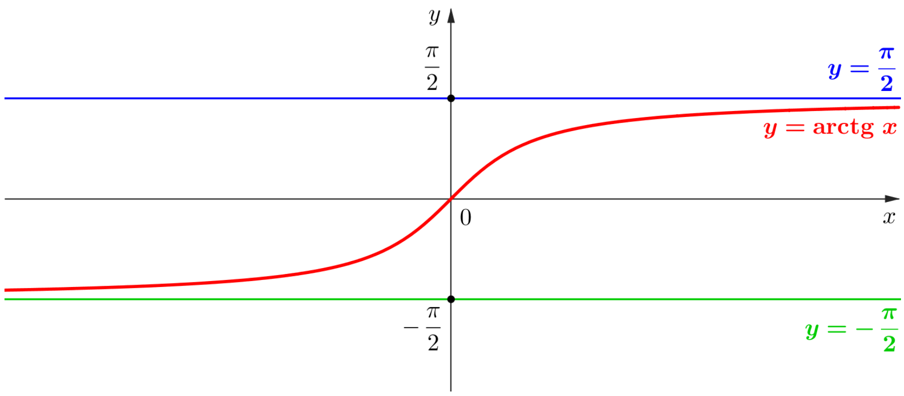
$$\boldsymbol{a} = \lim_{x\to\infty} \frac{\boldsymbol{f(x)}}{\boldsymbol{x}}, \qquad \boldsymbol{b} = \lim_{x\to\infty} [\boldsymbol{f(x) - ax}]$$

resp.

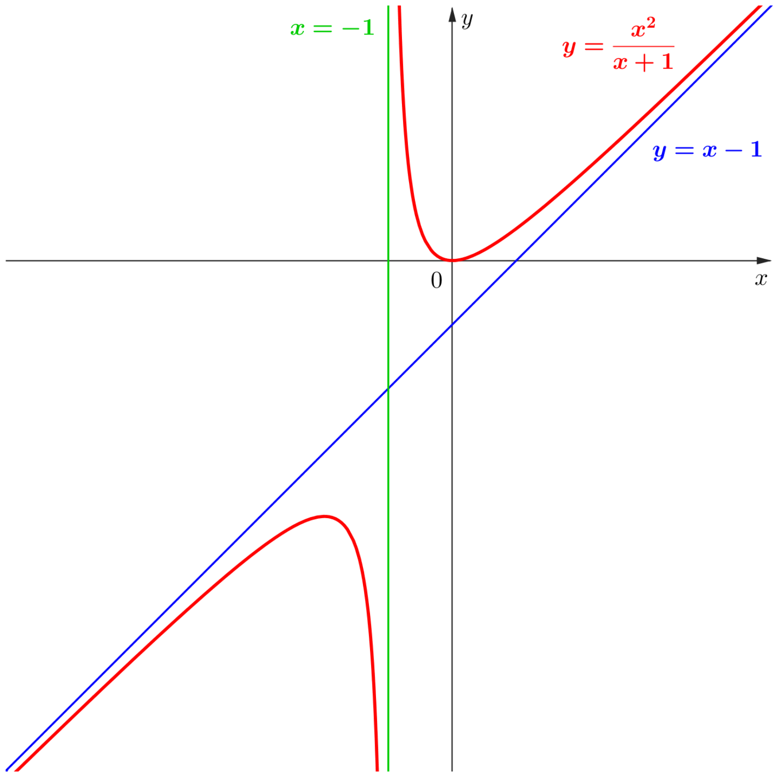
$$\boldsymbol{a} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\boldsymbol{f(x)}}{\boldsymbol{x}}, \qquad \boldsymbol{b} = \lim_{x\to-\infty} [\boldsymbol{f(x) - ax}]$$

Asymptoty se směrnicí

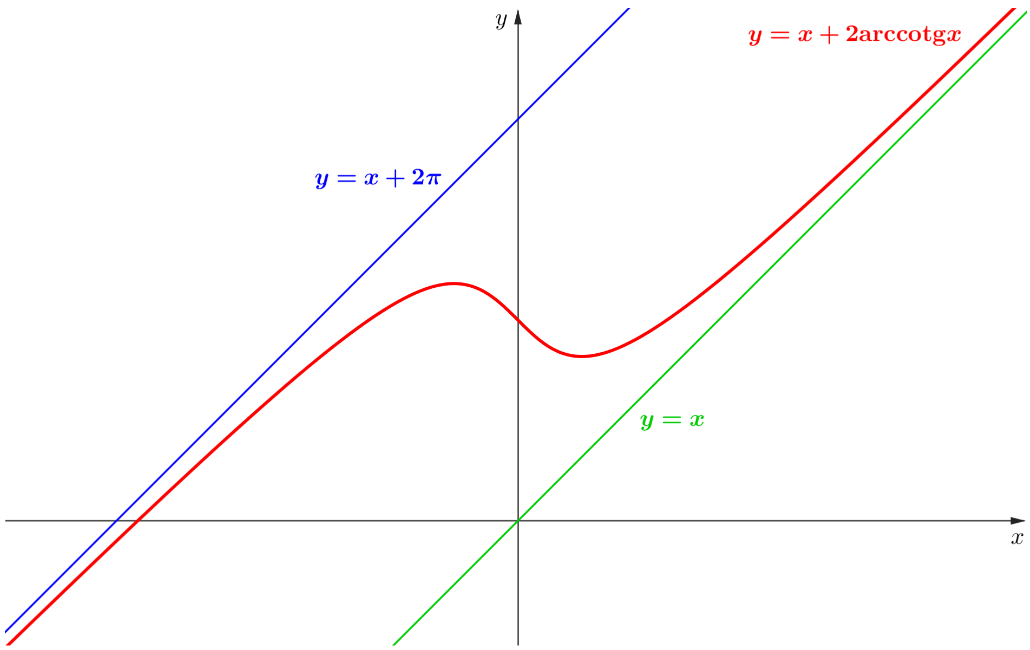
- pro $a = 0$ nazýváme také **vodorovné asymptoty**
- pro $a \neq 0$ nazýváme také **šikmé asymptoty**
- vodorovné asymptoty $y = b$ jsou rovnoběžné s osou x
- šikmé asymptoty $y = ax + b$ protínají osy x a y
- pokud při výpočtu koeficientů a, b jedna z limit **neexistuje nebo je nevlastní**, pak funkce asymptotu se směrnicí **nemá**



y
$\frac{\pi}{2}$
$y = \frac{\pi}{2}$
$y = \operatorname{arctg} x$
0
x
$-\frac{\pi}{2}$
$y = -\frac{\pi}{2}$



$x = -1$
y
$y = \frac{x^2}{x+1}$
$y = x - 1$
0
x



Příklad 3.14

Určete asymptoty funkce $f(x) = \dfrac{6x^2 + 2}{2x - 1}$.

1. **Z předpisu funkce**: $D(f)$, znaménko funkce, průsečíky grafu s osami, sudost / lichost, periodičnost
2. **Z první derivace**: rostoucí a klesající, lokální extrémy
3. **Z druhé derivace**: konvexní a konkávní, inflexní body
4. **Asymptoty**: se směrnicí a bez směrnice
5. **Graf**: ke všem výše zmíněným bodům dopočítáme funkční hodnoty a zkombinujeme zjištěné informace

Příklad 3.15 !

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.